

Introduzione agli Algoritmi Genetici

Prof. Beatrice Lazzerini

Dipartimento di Ingegneria della Informazione
Via Diotisalvi, 2
56122 PISA

ALGORITMI GENETICI (GA)

Sono usati per risolvere problemi di ricerca e ottimizzazione.

Riproducono il processo evolutivo della specie umana.

Considerano una popolazione di cromosomi (individui) che rappresentano soluzioni possibili per un certo problema.

La *qualità* di un individuo (cioè quanto è buona la soluzione per il problema) è misurata mediante una *funzione di fitness*.

In un certo senso, la funzione di fitness indica l'adattabilità all'ambiente: gli individui che meglio si adattano ('fit') hanno più probabilità di riprodursi e di trasmettere i propri geni alle generazioni future.

Un GA è una procedura di ricerca iterativa il cui scopo è l'ottimizzazione della funzione di fitness.

Partendo da una popolazione iniziale, un GA produce nuove generazioni che contengono (di solito) individui migliori delle precedenti: l'algoritmo evolve verso l'ottimo globale della funzione di fitness.

In realtà, non è garantito che un GA trovi una soluzione ottima globale; un GA è in grado di trovare soluzioni *buone* in tempi *ragionevoli*.

Nel modello tradizionale, i cromosomi sono stringhe di bit di lunghezza fissa e tutte le generazioni hanno la stessa dimensione (numero di individui).

Ogni cromosoma rappresenta un punto nello spazio di ricerca.

I più importanti operatori di ricerca sono la *ricombinazione* (o *crossover*) e la *mutazione*.

Il crossover combina i geni tipicamente di due individui per produrre individui figli che ereditano caratteristiche da entrambi i genitori.

La mutazione reintroduce nella popolazione materiale genetico perduto.

La ricerca genetica realizza un compromesso tra '*exploitation*' della soluzione disponibile migliore ed '*exploration*' dello spazio di ricerca.

Exploitation ed exploration corrispondono, rispettivamente, a *ricerca locale* e *ricerca globale*: exploitation eccessiva può portare l'algoritmo a convergere ad una soluzione non accettabile (la ricerca resta intrappolata in un ottimo locale), exploration eccessiva può non sfruttare appropriatamente la conoscenza già disponibile rendendo il processo di ricerca molto lento (un esempio è la ricerca casuale).

RAPPRESENTAZIONE DEL PROBLEMA

Funzione di codifica

$$C : S \rightarrow X,$$

dove S è lo spazio delle soluzioni del problema ed X è lo spazio dei cromosomi (spazio di ricerca).

Dato

$$c = C(s), s \in S,$$

la soluzione s può essere interpretata come il fenotipo associato al genotipo (o cromosoma) c .

genoma di un organismo = informazione genetica completa

genotipo = insieme dei geni contenuti in un genoma (cioè, il programma genetico di un individuo ereditato dai genitori e codificato nel DNA di quell'organismo)

fenotipo = realizzazione di un genotipo in un individuo concreto, cioè l'insieme di tutte le caratteristiche osservabili di un organismo.

Ricombinazione e mutazione avvengono a livello di genoma.

FUNZIONE DI FITNESS

Per un problema di ottimizzazione la funzione di fitness può coincidere con la funzione obiettivo (o una sua trasformazione).

Osserviamo che i GA sono procedure di massimizzazione, quindi valori di fitness più alti sono associati ad individui migliori (problemi di minimizzazione vengono di solito riformulati).

A volte la fitness di un cromosoma è misurata in maniera implicita, valutando la qualità della corrispondente soluzione rispetto al problema.

Ad esempio, se abbiamo a disposizione un insieme di esempi, la fitness può essere calcolata in funzione dell'errore della soluzione (differenza tra la soluzione attuale e l'uscita desiderata).

ELEMENTI DI BASE DI UN GA

La nuova generazione $P(t+1)$ è ottenuta dalla popolazione $P(t)$ per mezzo dei seguenti passi:

- *Valutazione*: si valuta la qualità di ogni individuo (tramite la funzione di fitness).
- *Selezione per riproduzione*: gli individui migliori sono selezionati per la riproduzione. Sono inseriti in una popolazione intermedia P1. Gli individui in P1 entreranno nel *mating pool* con una certa probabilità (probabilità di crossover).
- *Crossover*: si applica l'operatore di crossover agli individui nel mating pool. Si ottiene una nuova popolazione intermedia P2.
- *Mutazione*: l'operatore di mutazione è applicato con una certa probabilità (probabilità di mutazione) agli individui di P2. Viene prodotta una popolazione P3.
- *Selezione per rimpiazzamento e sopravvivenza*: la nuova generazione $P(t+1)$ contiene gli individui della popolazione P3 ma può includere anche altri individui. Sono possibili più algoritmi di selezione. Ad esempio, un sottoinsieme di individui di $P(t)$ che non sono stati selezionati per la riproduzione, oppure gli individui migliore di $P(t)$.

GA CANONICO

I cromosomi sono stringhe binarie di lunghezza fissa. Il valore di ogni gene è 0 o 1.

Il numero di cromosomi in ogni generazione è costante.

Il modello GA canonico parte con una arbitraria popolazione iniziale. La nuova generazione $P(t+1)$, ottenuta applicando crossover e mutazione, rimpiazza completamente la generazione precedente.

ALGORITMO GA CANONICO

$t = 0$;

inizializza (casualmente) una popolazione di cromosomi $P(t)$;

valuta $P(t)$ usando una funzione di fitness;

while (condizione di terminazione non soddisfatta) **do**

begin

 seleziona individui da $P(t)$ ed inseriscili in P1;

 seleziona individui da P1 ed inseriscili nel mating pool (MP);

 applica il crossover agli individui di MP formando P2;

 applica la mutazione agli individui di P2 formando P3;

 forma $P(t+1)$ selezionando per il rimpiazzamento individui da P3 e $P(t)$;

$t = t+1$;

end

CONDIZIONE DI TERMINAZIONE

Un'alta percentuale degli individui di una generazione ha la stessa fitness dell'individuo migliore.

Sono state generate n generazioni, con n fissato.

SOLUZIONE AL PROBLEMA

miglior individuo dell'ultima generazione

miglior individuo su tutte le generazioni

Esempio

Supponiamo di voler massimizzare una funzione di 3 variabili $f(x,y,z)$.

Assumiamo che ogni cromosoma rappresenti un punto $\langle x,y,z \rangle$ e che sia costituito da 3 geni ognuno dei quali codifica una delle tre variabili. Se ogni variabile è rappresentata con un numero binario di 10 bit, avremo cromosomi lunghi 30 bit. La funzione di fitness sarà il valore della funzione f nel punto rappresentato dal cromosoma.

STRATEGIA DI SELEZIONE PER LA RIPRODUZIONE

La selezione per la riproduzione ha un duplice scopo:

- favorire la riproduzione di individui con fitness alta
- preservare la diversità della popolazione in modo da esplorare tutte le regioni dello spazio di ricerca

PROPORTIONAL SELECTION

È la strategia di selezione più usata.

Supponiamo che la popolazione attuale contenga n cromosomi:

$$P(t) = \{x^1, x^2, \dots, x^n\}$$

fitness totale F della popolazione

$$F = \sum_{i=1}^n f(x^i)$$

probabilità di selezione del cromosoma x^i

$$p_i = \frac{f(x^i)}{F}$$

Algoritmo

Una ruota girevole è divisa in n settori ciascuno corrispondente ad un cromosoma. La dimensione dell' i -esimo settore è proporzionale alla probabilità di selezione p_i del cromosoma x^i .

La ruota viene fatta girare n volte. Ogni volta si sceglie un cromosoma che viene copiato nella popolazione intermedia P_1 .

STRATEGIA DI SELEZIONE PER IL RIMPIAZZAMENTO

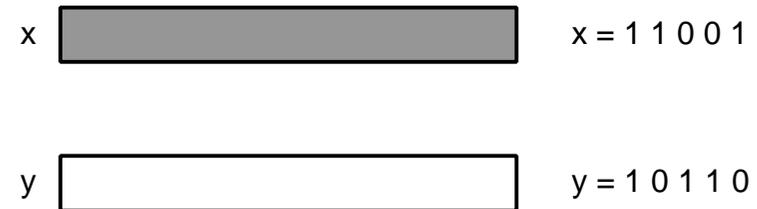
La selezione per il rimpiazzamento ha lo scopo di scegliere quali fra gli individui padri e gli individui figli costituiranno la nuova popolazione.

Nel GA canonico si assume che la generazione $P(t+1)$ sia costituita dai figli (creati per crossover/mutazione) e da quegli individui nella popolazione intermedia $P1$ che non sono stati scelti per l'accoppiamento (mating). Il numero di individui in ogni generazione è costante.

Un'altra possibilità è copiare un numero fissato di individui (i migliori) da $P(t)$ in $P(t+1)$ senza modificarli. Ovviamente, questi individui parteciperanno anche alla selezione per la riproduzione.

ONE-POINT Crossover

Si genera un numero casuale $k \in \{1, 2, \dots, L-1\}$, con L lunghezza dei cromosomi.



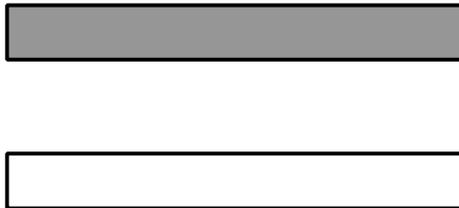
Se $k = 2$ otteniamo:



In generale, si considerano due padri che generano due figli.

TWO-POINT Crossover

Si generano casualmente due punti di crossover.



Otteniamo:



Si può generalizzare ottenendo **N-POINT Crossover**.

UNIFORM Crossover

Si usa un parametro globale che indica, per ogni gene di un discendente, la probabilità che tale gene provenga dal primo o dal secondo genitore.

Si può ad esempio per ogni posizione del primo discendente scegliere con una certa probabilità qual è il genitore che fornisce il gene. Il secondo discendente prenderà il gene dall'altro genitore.

Oppure si può calcolare ogni gene di ogni discendente indipendentemente dagli altri permettendo in tal modo ad un genitore di fornire lo stesso gene ad entrambi i figli.

PROBABILITÀ DI Crossover

La probabilità di crossover generalmente assume valori dell'ordine di 10^{-1} .

MATING

Una procedura di mating determina quali cromosomi si accoppiano per generare discendenti.

Tipicamente, i genitori sono scelti a caso con uguale probabilità tra gli individui nel mating pool.

MUTAZIONE

La mutazione modifica un singolo gene di un cromosoma.

Grazie alla mutazione, tutti i possibili valori di ogni gene sono considerati nel processo di ricerca.

PROBABILITÀ DI MUTAZIONE

Valori tipici sono $p_m \in [0.001, 0.01]$.

OPERATORI DI MUTAZIONE

Per ogni gene di ogni cromosoma, si genera un numero casuale q con distribuzione uniforme in $[0,1]$:

- se $q < p_m$ il gene è selezionato per la mutazione;
- se si usa un operatore di *mutazione forte*, il gene viene mutato ($0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0$); se si usa un operatore di *mutazione debole*, il nuovo valore è scelto casualmente tra 0 e 1 (di fatto, il gene potrebbe alla fine risultare immutato).

CODIFICA REALE

I geni sono codificati come numeri reali.

Cromosoma = vettore a componenti reali.

OPERATORI DI RICOMBINAZIONE

PER LA CODIFICA REALE

CROSSOVER DISCRETO (è analogo al crossover uniforme nella codifica binaria):

per ogni posizione i del primo discendente si sceglie (con una probabilità p fissata) il padre che fornisce quel gene. Il gene corrispondente nel secondo figlio sarà fornito dall'altro genitore. Se $p = 0.5$ il ruolo dei due genitori è simmetrico.

CONVEX CROSSOVER: i discendenti (eventualmente un unico discendente) sono espressi come combinazione convessa di due o più genitori.

Ad esempio, i cromosomi x ed y possono produrre i discendenti u e v i cui geni sono

$$u_i = \mathbf{a} x_i + (1-\mathbf{a}) y_i$$

$$v_i = \mathbf{a} y_i + (1-\mathbf{a}) x_i$$

$$\text{con } \mathbf{a} \in [0,1].$$

DIAGONAL MULTI-PARENT CROSSOVER: crea p discendenti da p genitori.

Si scelgono n punti di crossover. Il primo discendente eredita l' i -esimo segmento dal padre i , $i = 1, \dots, p$. Gli altri discendenti sono costruiti operando una rotazione dei segmenti dei genitori.

OPERATORI DI MUTAZIONE PER LA CODIFICA REALE

L'operatore di mutazione può agire su un unico gene oppure su tutti i geni all'interno di un cromosoma.

Nel primo caso, il gene su cui agire è scelto in modo casuale.

Ogni singolo gene all'interno di un cromosoma può essere rimpiazzato (con una certa probabilità) da un numero reale scelto casualmente all'interno dell'insieme dei valori di quel gene.

Di solito, la probabilità di mutazione è la stessa per tutti i geni.