

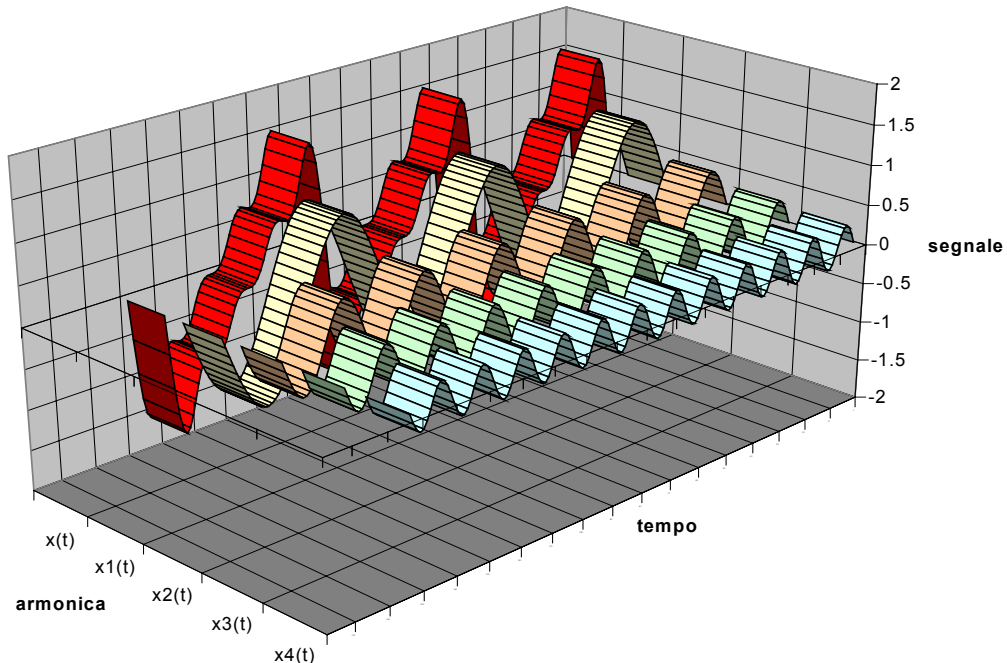
Richiami teorici sull'analisi del segnale

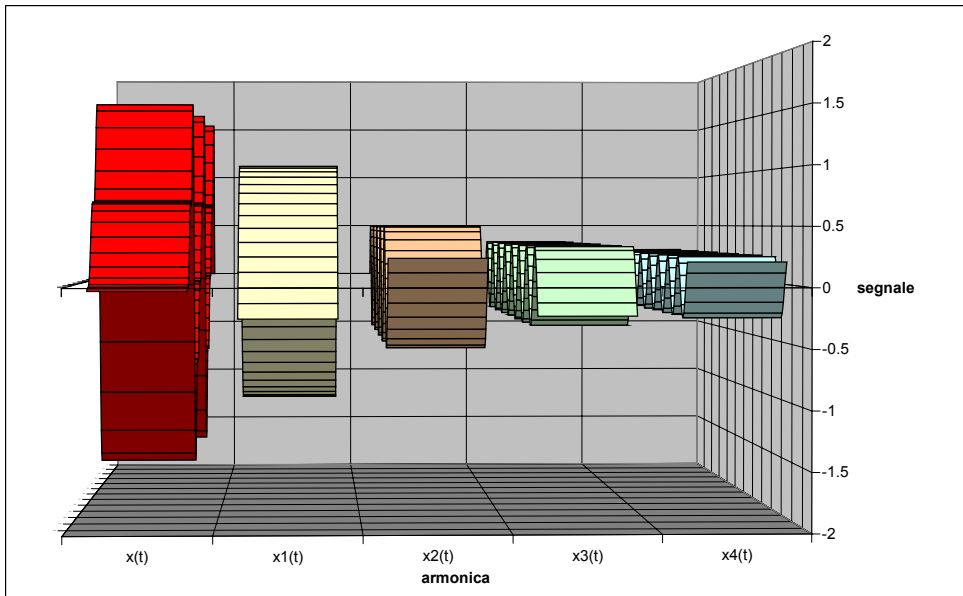
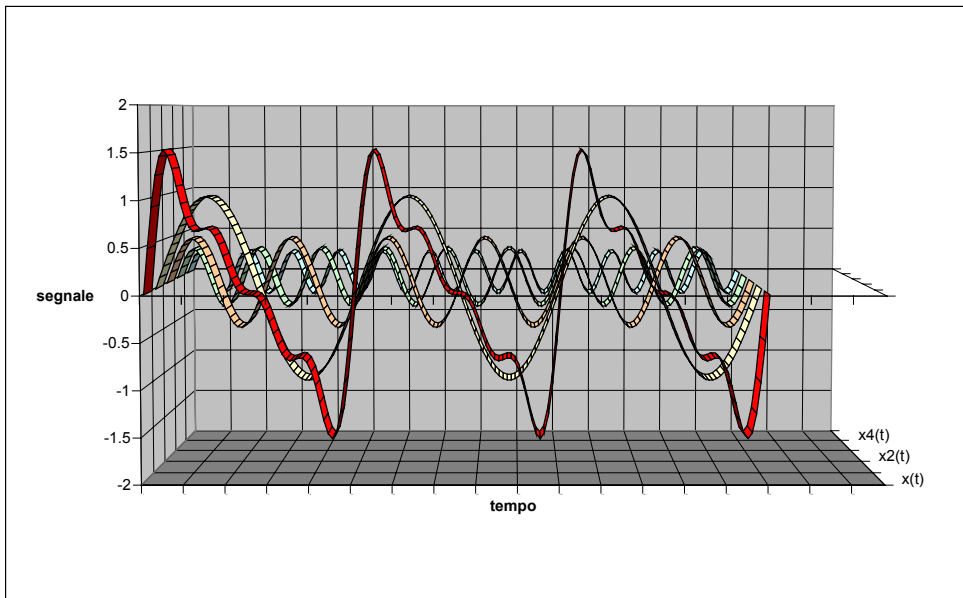
Trasformata discreta di Fourier DFT

viene impiegata per analizzare segnali discreti (tipicamente provenienti da un'operazione di campionamento)

$$G_i = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} g_k \cdot e^{-j \cdot \left(2 \cdot \pi \cdot \frac{i}{N} \cdot k \right)}$$

Fornisce lo **spettro del segnale**, ovvero la rappresentazione del medesimo nel **dominio delle frequenze**





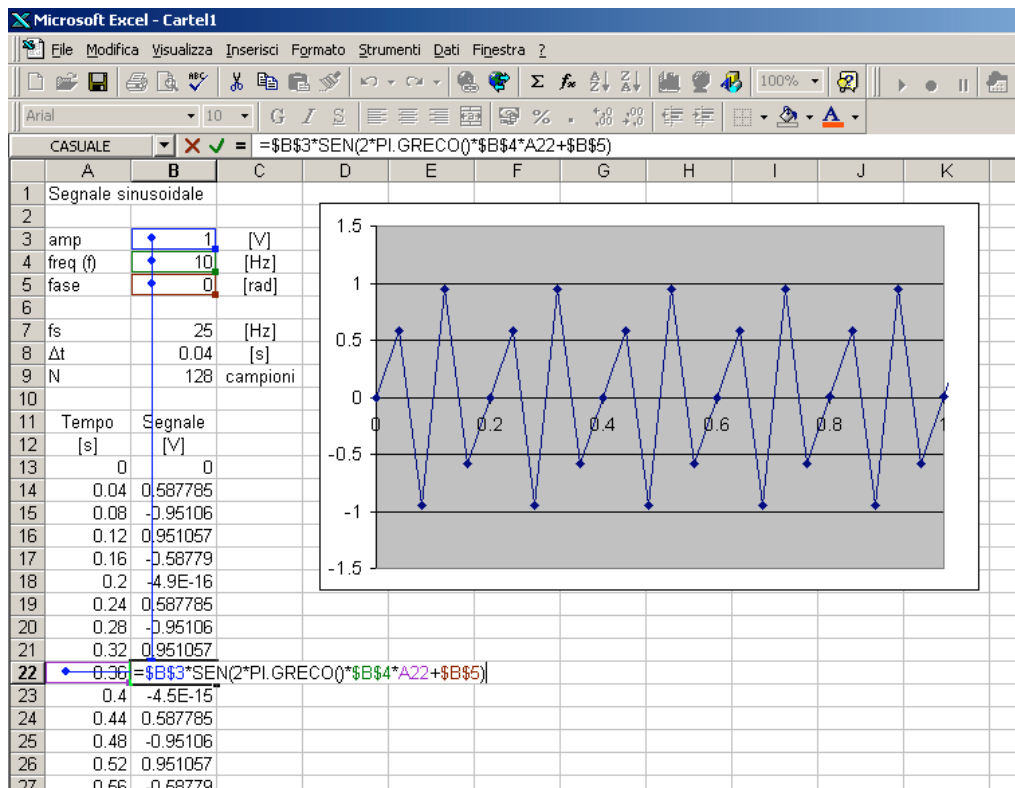
Solitamente viene implementato un algoritmo più efficiente della DFT dal punto di vista funzionale denominato **FFT** e basato sulla medesima teoria (il risultato è lo stesso!!!)

Impiego di MS Excel per l'analisi del segnale

Definizione di un segnale nel dominio del tempo

Non è possibile definire una funzione continua. Il segnale risulta di per sé campionato.

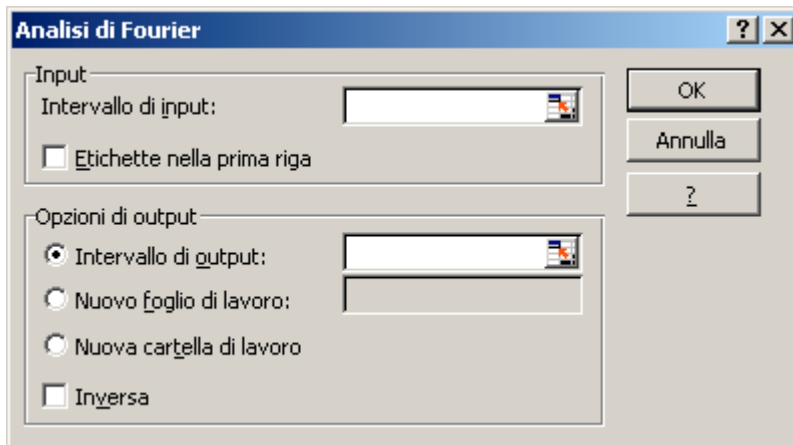
Una volta fissata la frequenza di campionamento f_s è possibile costruire una colonna del tempo. Ad ogni istante, se è noto il segnale, è possibile far corrispondere un valore di quest'ultimo mediante l'inserimento della formula opportuna. L'incremento temporale fra una riga e la successiva è dato da $1/f_s$.



Utilizzo dell'analisi di Fourier (FFT) di Excel

Una volta costruite le colonne del tempo e del segnale è possibile ricavare lo spettro utilizzando uno strumento di Excel che implementa la FFT del segnale:

- Dal menù strumenti selezionare la voce Analisi dati...
- Tra le voci elencate selezionare Analisi di Fourier...
- Appare la seguente finestra:



- In *Intervallo di input* selezionare (tastino con freccia) la colonna contenete il segnale (nel tempo)
- In *Intervallo di output* selezionare la prima cella in alto della colonna in cui si vuole vengano riportati i numeri complessi componenti lo spettro in frequenza del segnale
- Clickando *OK* viene eseguita la FFT; affinché l'algoritmo funzioni è necessario che i campioni temporali siano in numero corrispondente ad una potenza di 2.
- Solo le prime $N/2$ righe spettrali sono da prendere in considerazione. La frequenza massima è $f_s/2$.

NOTA pratica: normalmente gli strumenti di analisi non vengono installati con Excel. Per installarli selezionare dal menù strumenti la voce aggiunte e scegliere dall'elenco la voce Strumenti di Analisi. Se manca tale aggiunta è necessario installare l'aggiunta da CD.

- A questo punto si ha a disposizione una colonna contenente i componenti complessi calcolati dello spettro ; tali valori vanno tutti divisi per $N/2$, dove N è il numero dei campioni considerati (potenza di 2). Per poter effettuare la divisione è necessario utilizzare una funzione (presente in Excel nel gruppo di funzioni denominato *Funzioni ingegneristiche* quando è installata l'aggiunta *Strumenti di Analisi*) che esegue la divisione fra numeri complessi; nella versione italiana tale funzione è denominata *COMP.DIV()*. Essa riceve in ingresso i due numeri complessi da dividere: il numero complesso ottenuto mediante FFT è il dividendo, un numero complesso avente parte reale pari ad $N/2$ e parte immaginaria nulla è il divisore. In questo modo si costruisce la colonna contenete i componenti dello spettro complessi numericamente corretti in termini di ampiezza (modulo).

- Impiegando altre funzione contenute in *Funzioni ingegneristiche* è possibile calcolare *Modulo, Fase, Parte Reale e Parte Immaginaria* dello spettro:

Modulo --> COMP.MODULO()

Fase --> COMP.ARGOMENTO()

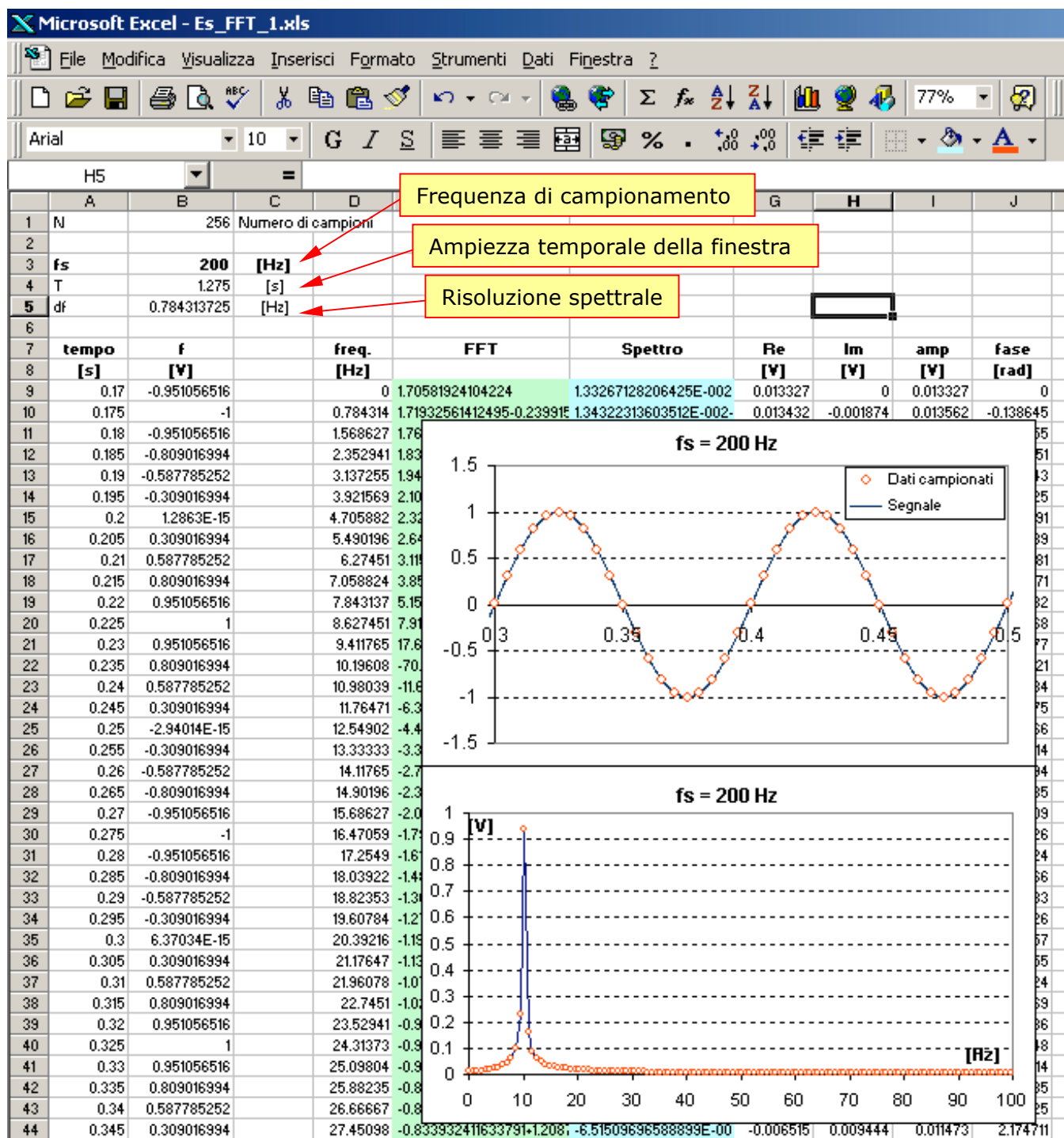
P. Reale --> COMP.PARTE:REALE()

P.Immaginaria --> COMP.IMMAGINARIO()

- A questo punto è noto lo spettro e resta da costruire la corrispondenza di ogni singola riga spettrale (ogni singolo valore complesso) con un dato di frequenza. Si calcola la risoluzione spettrale (ovvero la distanza in frequenza fra due righe spettrali) che è data da $1/T$, dove T è l'ampiezza temporale della finestra attraverso cui si è valutato il segnale (durata del segnale considerato); T è pari ad N volte $1/f_s$, ovvero N volte l'intervallo temporale che divide due campioni successivi. In corrispondenza della prima riga spettrale si impone frequenza 0; le frequenze successive sono separate da un intervallo in frequenza coincidente con la risoluzione spettrale.

NOTA: Il massimo numero di righe spettrali ottenibili dalla FFT è $N/2$; o meglio: si ottengono $N/2$ righe spettrali sul semiasse positivo delle frequenze. Si può vedere tale limite considerando il criterio di Nyquist:

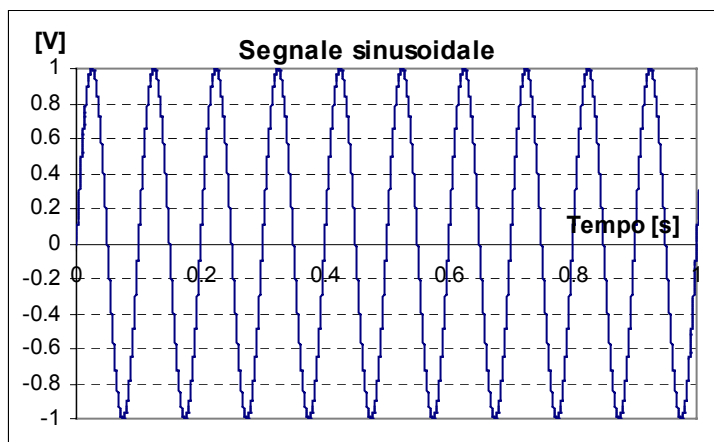
$$f_{\max} = k \cdot \Delta f = \frac{f_c}{2} \Rightarrow k = \frac{f_c}{2 \cdot \Delta f} = \frac{1/(T/N)}{2 \cdot (1/T)} = \frac{N}{2}$$



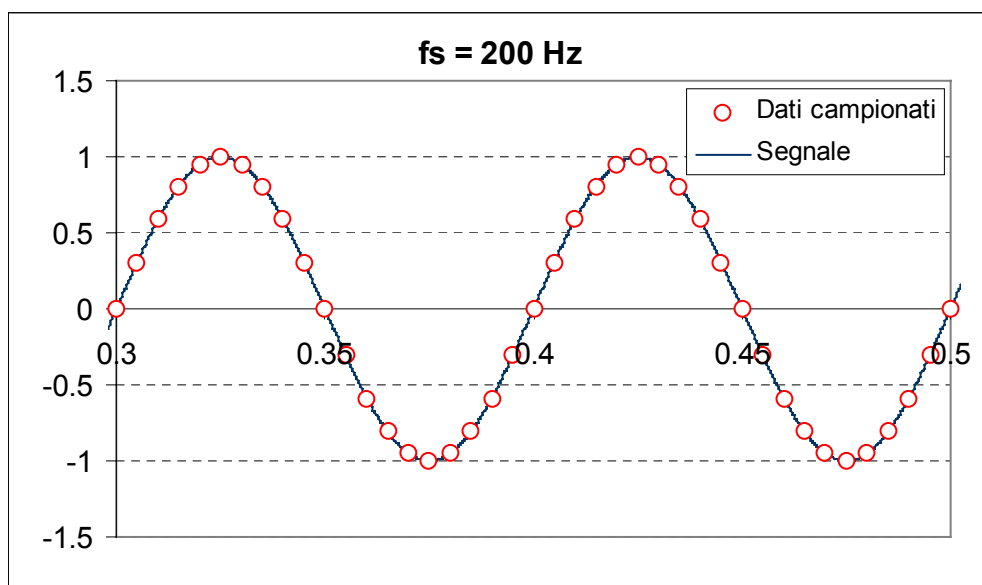
Leakage e finestrazione

Analisi di un segnale sinusoidale

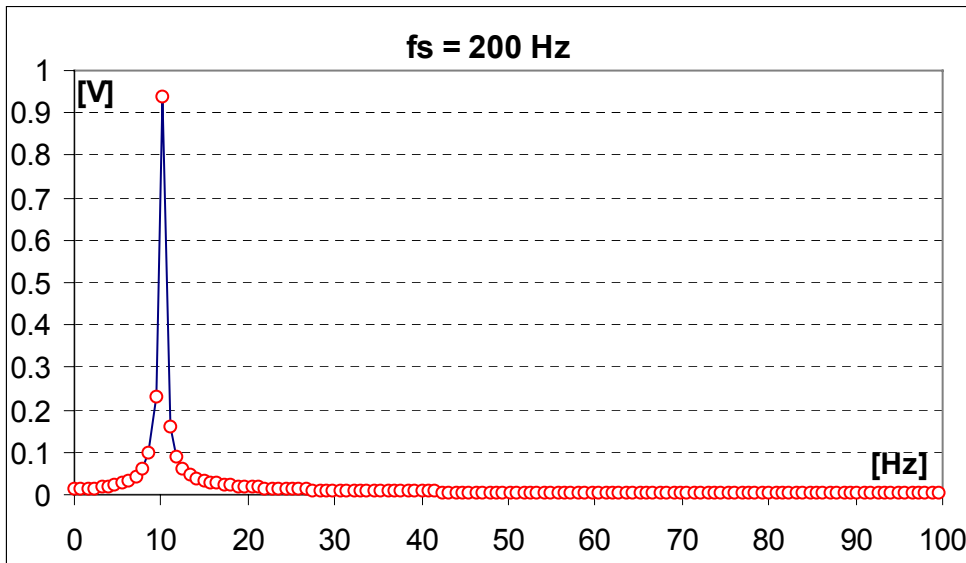
Si consideri un segnale sinusoidale avente ampiezza pari ad 1 V, frequenza di 10 Hz e fase nulla.



- Si supponga di campionare il segnale a 200 Hz.



- Applicando la FFT ai dati campionati si ricava il seguente spettro. Lo spettro è costituito da segmenti verticali il cui estremo superiore è dato dal pallino rosso. La linea blu è l'involuppo dello spettro.



- Viene individuata la corretta frequenza del segnale trattato (10.15 Hz - molto vicina ai 10 Hz). La massima frequenza (detta *folding frequency*) è pari a $f_s/2$ ed in questo caso vale 100 Hz. La risoluzione spettrale è data da:

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N \cdot \Delta t} = \frac{1}{N \cdot (1/f_s)} = \frac{f_s}{N}$$

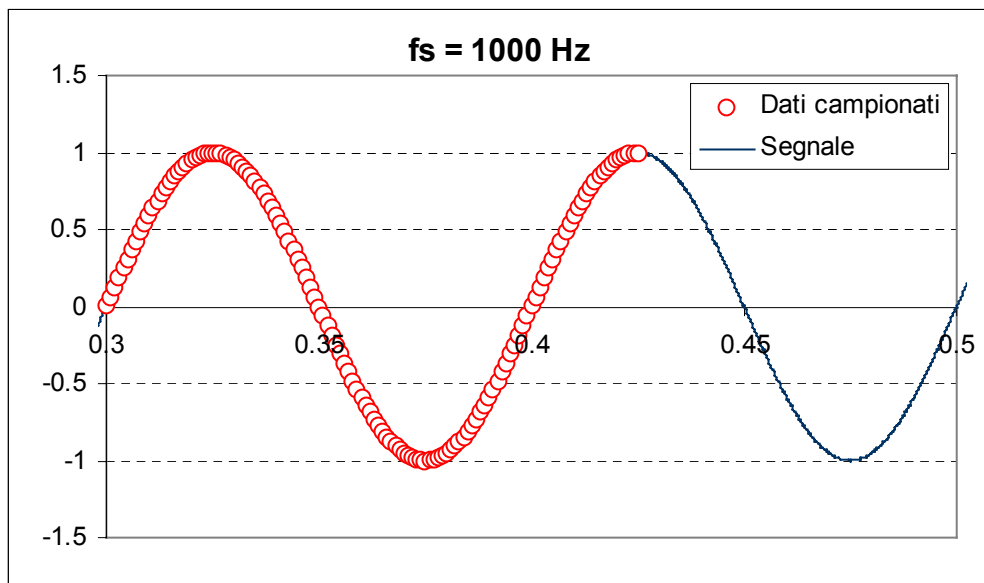
- Nel caso esaminato, avendo considerato 256 campioni ($N=256$) e una frequenza di campionamento di 200 Hz, si ricava $\Delta f=0.78125$.

- OSSERVAZIONI:

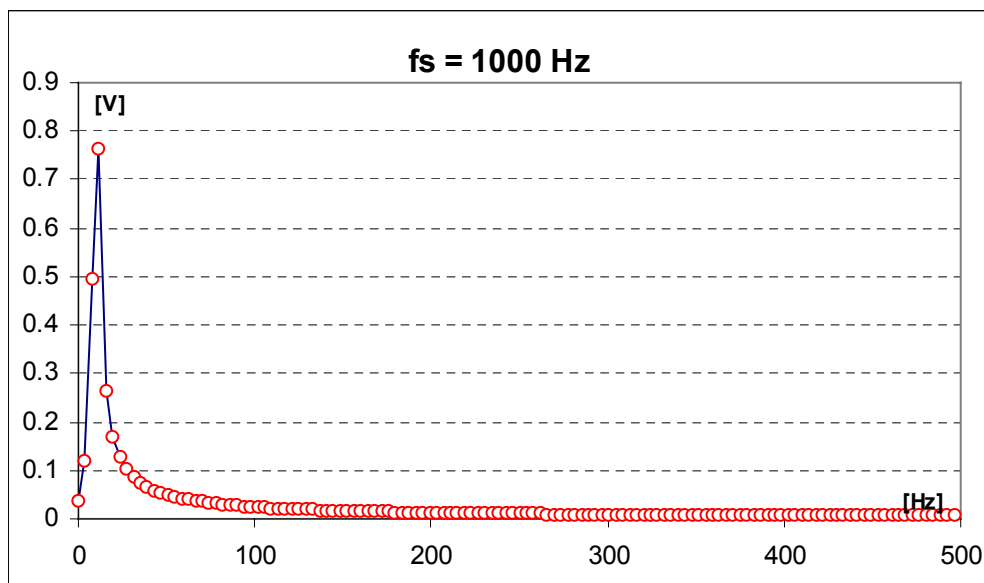
- 1) Sebbene lo spettro in frequenza mostri un picco a circa 10 Hz, tale picco non è definito su una banda in frequenza infinitesima ma è distribuito su una certa banda finita. Questo fenomeno assume il nome di *leakage* ed è dovuto al fatto che la finestra temporale considerata contiene un numero non intero di periodi del segnale di partenza (il segnale, in tale finestra, non inizia e finisce con la stessa fase).

- 2) L'ampiezza del picco non è 1 (ampiezza del segnale di partenza), ma è inferiore. Tale fenomeno si spiega considerando che l'energia associata a tale picco è distribuita su una banda di frequenze a causa del *leakage* e non è associata ad una sola frequenza, come ci si aspetterebbe in via teorica.

- Si supponga di campionare il segnale a 1000 Hz.



- Considerando ancora $N=256$ campioni, si ricava il seguente spettro.



- Si ottengono:

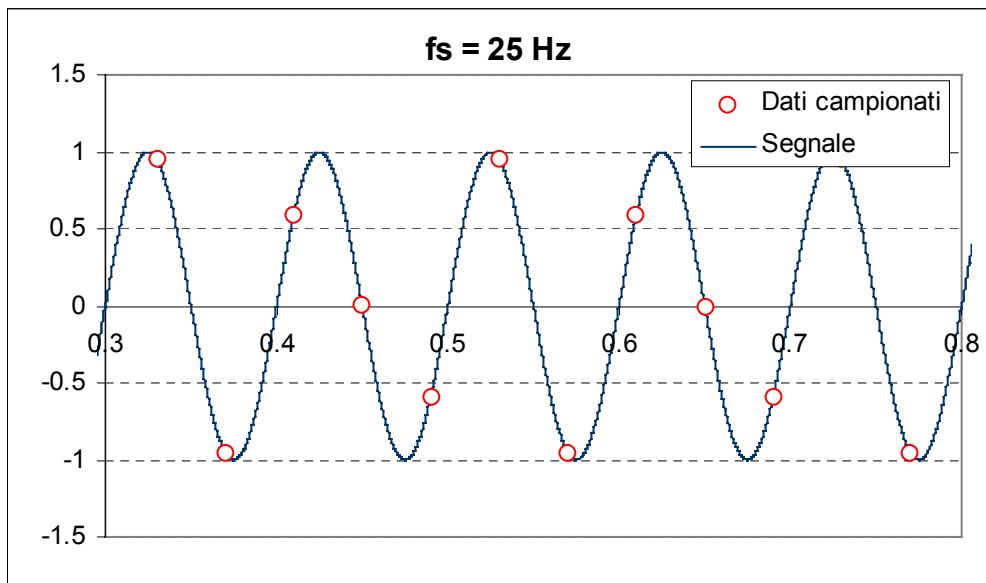
Frequenza massima: $f_{\max}=500$ Hz;

Risoluzione spettrale: $\Delta f=3.90625$ Hz.

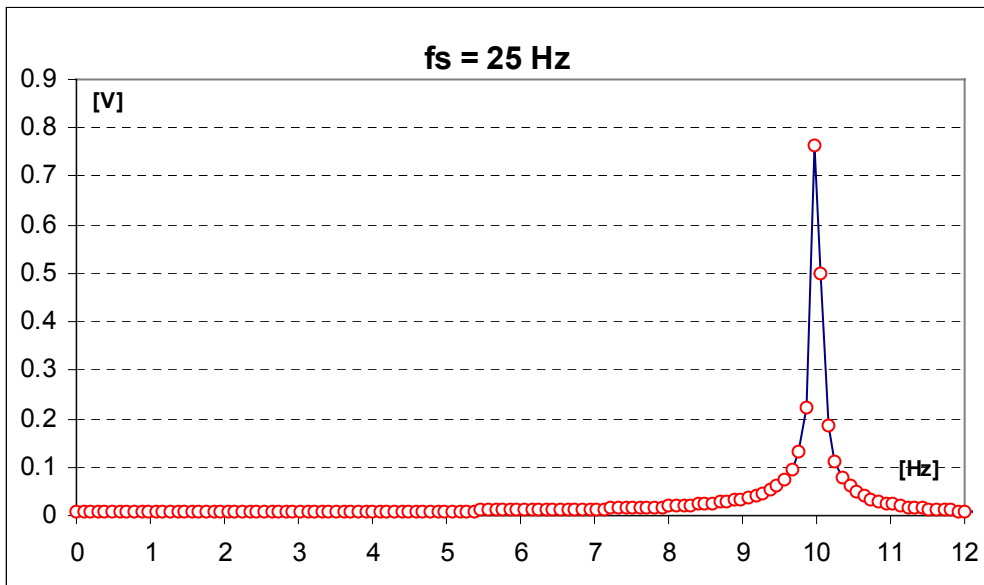
- OSSERVAZIONI:

- 1) Si ottiene un valore della risoluzione spettrale maggiore rispetto al caso precedente: questo implica un peggioramento nella definizione dello spettro: si parla di risoluzione spettrale più povera. Il peggioramento della risoluzione spettrale introduce incertezza nella definizione della frequenza del picco (il picco risulta a 11.72 Hz anziché 10 Hz).
- 2) Lo spettro evidenzia un effetto di leakage notevole, a causa del peggioramento della risoluzione spettrale.
- 3) L'ampiezza del picco è ulteriormente inferiore rispetto al caso precedente: ciò è dovuto all'impoverimento in risoluzione spettrale che incrementa l'effetto leakage.

- Si supponga di campionare il segnale a 25 Hz.



- Considerando ancora $N=256$ campioni, si ricava il seguente spettro.



- Si ottengono:

Frequenza massima: $f_{max}=12.5$ Hz;

Risoluzione spettrale: $\Delta f=0.09765625$ Hz.

- OSSERVAZIONI:

- 1) Si ottiene un'ottima definizione del picco in termini di frequenza: 9.96 Hz.
- 2) La banda di leakage è notevolmente ridotta.
- 3) L'ampiezza del picco è comunque inferiore ad 1.

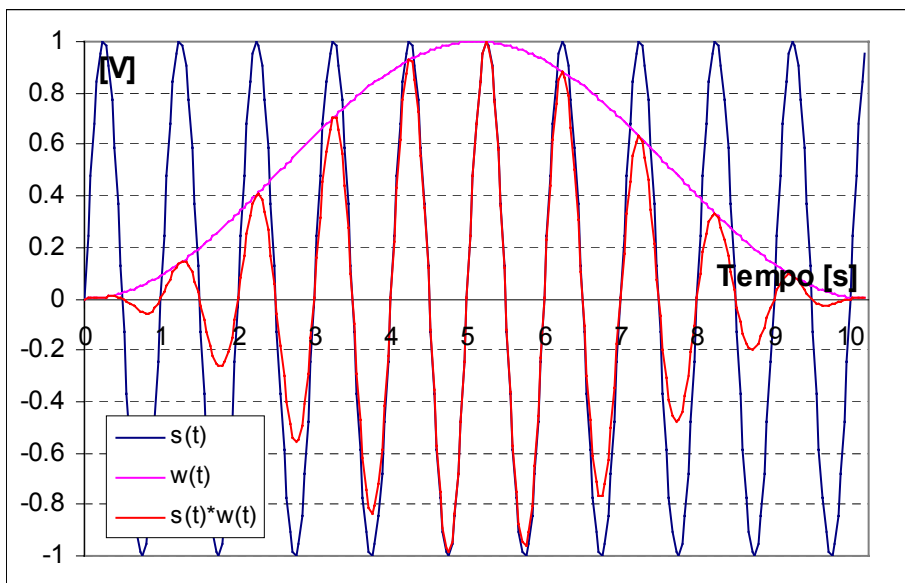
Si deduce che *un'elevata frequenza di campionamento del segnale non conduce necessariamente a risultati migliori!!!!*

Finestra di Hanning

Per attenuare l'effetto leakage si ricorre alla finestratura del segnale.

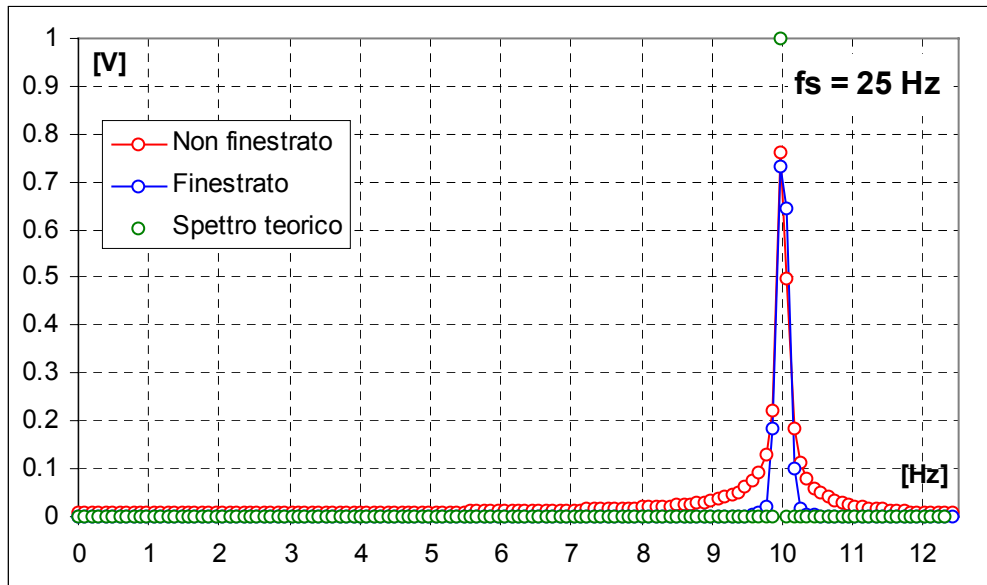
Si cerca di fare in modo che venga eliminato l'effetto bordo portando a 0 il segnale a entrambi gli estremi della finestra temporale considerata. Per fare ciò, il segnale di partenza viene moltiplicato, nel dominio del tempo, per un secondo segnale, il quale definisce il tipo di finestratura. Una delle possibili finestre da impiegare è la **finestra di Hanning**, la cui espressione è:

$$w(t) = 0.5 \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T}\right) \right] \quad 0 \leq t \leq T$$



La finestra enfatizza la parte centrale del segnale mentre porta a 0 i contributi di bordo, comportando dunque perdita di informazioni. In tal modo, tuttavia, si può ritenere che il segnale finestrato inizi e termini con la medesima fase, perché forzato ad assumere valore nullo agli estremi (0 e T). In questo modo si ha un'attenuazione del leakage, ma non si ottiene comunque lo spettro ideale.

Eseguendo la FFT del segnale finestrato si ricava lo spettro riportato nel diagramma seguente a confronto con lo spettro del segnale non finestrato.



- Si osserva che l'introduzione della finestra di Hanning comporta una visibile riduzione del leakage.
- Applicando la finestra l'ampiezza del picco si riduce ulteriormente rispetto al caso di segnale non finestrato. Moltiplicando il modulo dello spettro ottenuto su segnale finestrato per $\sqrt{8/3}$ si ottiene un'ampiezza prossima a quella dello spettro relativo al segnale non finestrato (nel diagramma è già stato considerato tale coefficiente correttivo).
- Il fatto che l'applicazione della finestra non elimini completamente il leakage può essere spiegato considerando che l'applicazione della medesima al segnale comporta una perdita di informazioni agli estremi della finestra temporale.

Aliasing

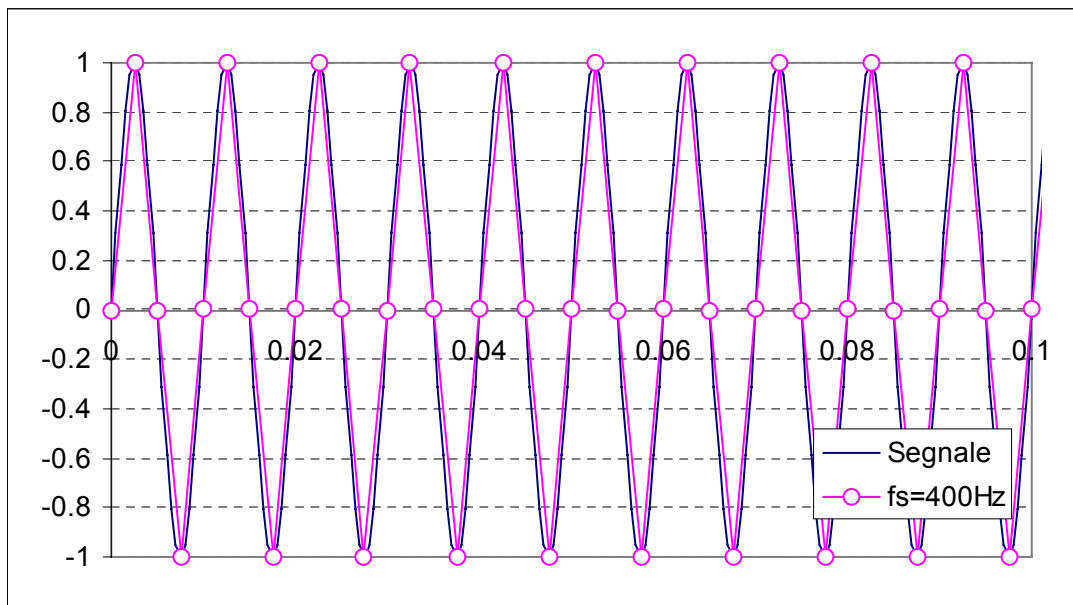
Si tratta di un fenomeno per cui, a causa di un errato campionamento, armoniche in alta frequenza del segnale vengono riportate nel suo spettro come armoniche in più bassa frequenza.

Si verifica per le armoniche del segnale che hanno frequenza superiore alla metà della frequenza di campionamento. Dunque, affinché non vi sia aliasing deve valere la seguente relazione teorica (Teorema di Nyquist):

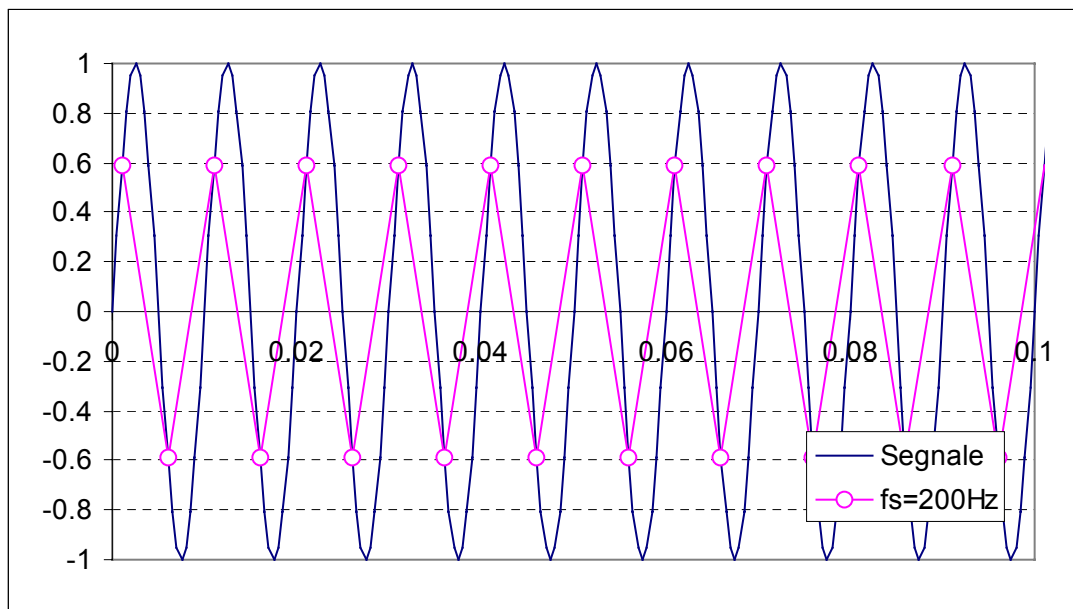
$$f_{MAX} < \frac{f_s}{2}$$

Dove f_{MAX} è la massima frequenza contenuta nel segnale, mentre f_s è la frequenza di campionamento.

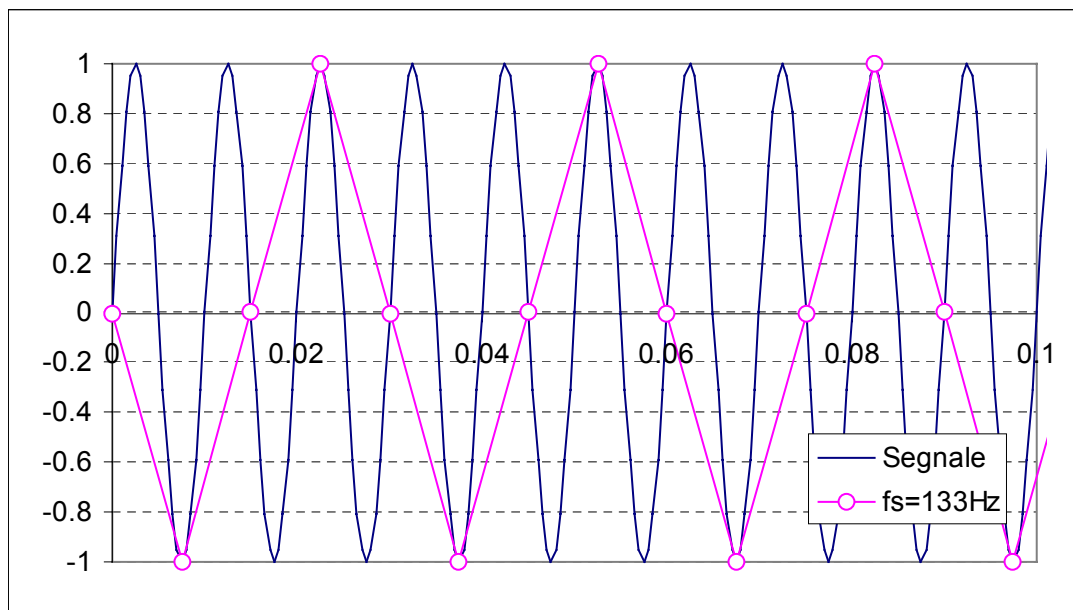
Esempio di campionamento di un segnale sinusoidale a 100 Hz.



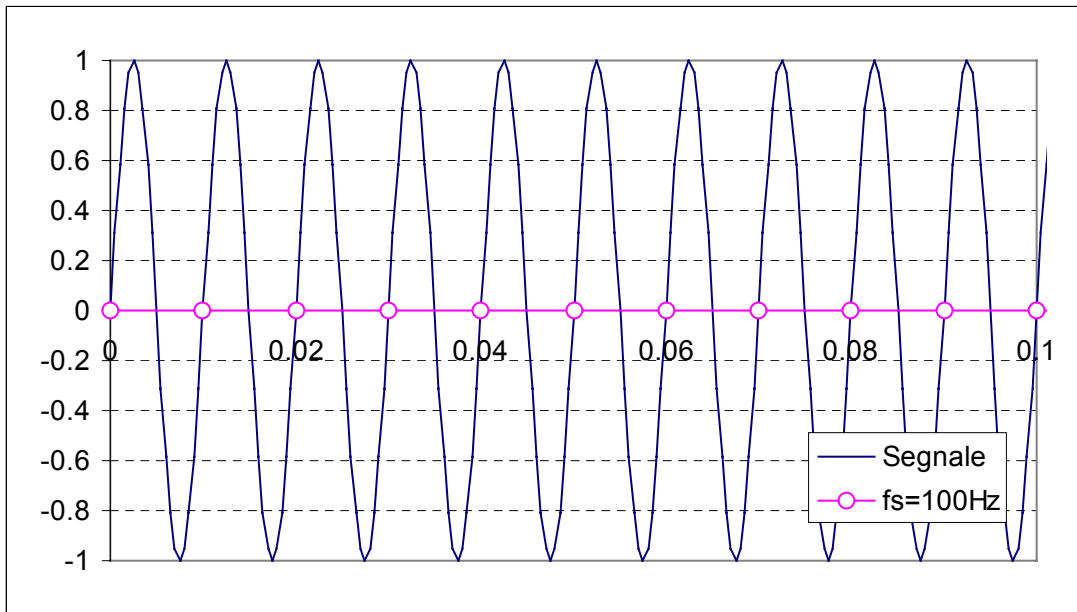
Non ci sarà aliasing: la frequenza del segnale campionato è pari a quella del segnale analogico considerato.



Non ci sarà aliasing: la frequenza del segnale campionato è pari a quella del segnale analogico considerato.



Ci sarà aliasing: la frequenza del segnale campionato è inferiore a quella del segnale analogico originario. Il periodo del segnale campionato risulta 0.03 s; quindi si otterrà una frequenza per il segnale campionato di $1/(0.03\text{s})$ di circa 33.3 Hz. Quindi l'armonica ad elevata frequenza (100Hz) del segnale viene tradotta in un'armonica a bassa frequenza (33Hz) a causa del campionamento.

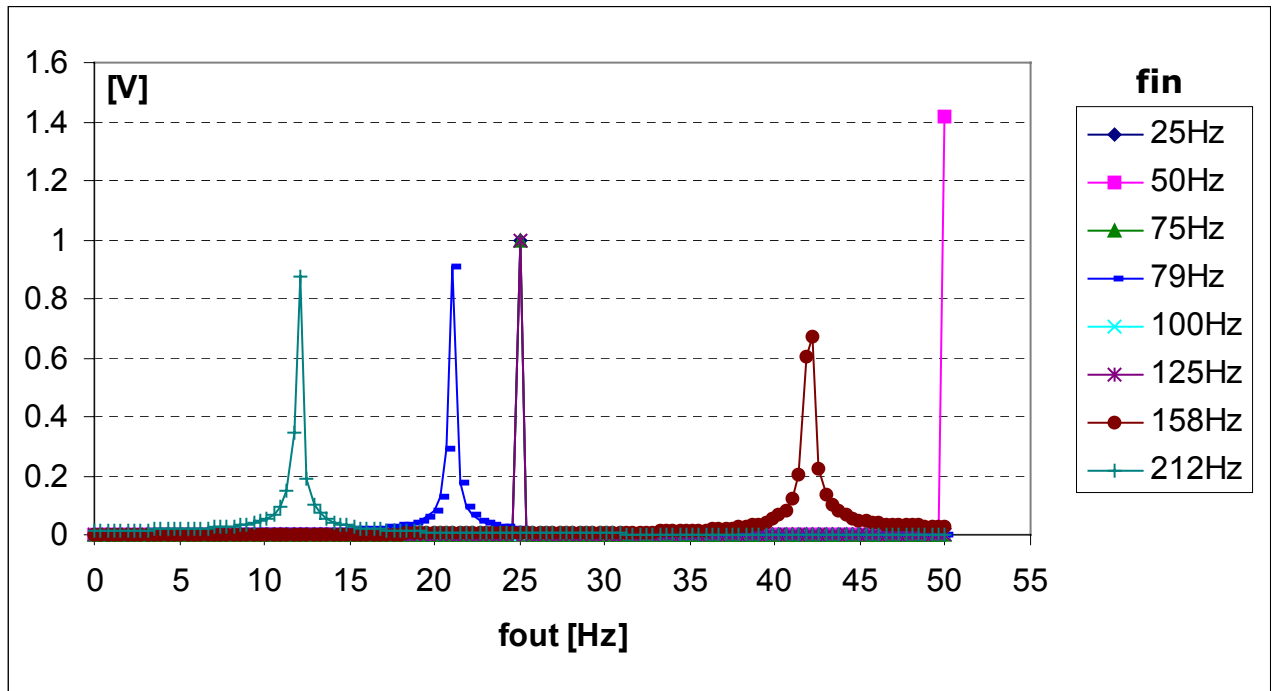


Ci sarà aliasing: la frequenza del segnale campionato è inferiore a quella del segnale analogico originario. In questo caso si ricava addirittura frequenza nulla!!!

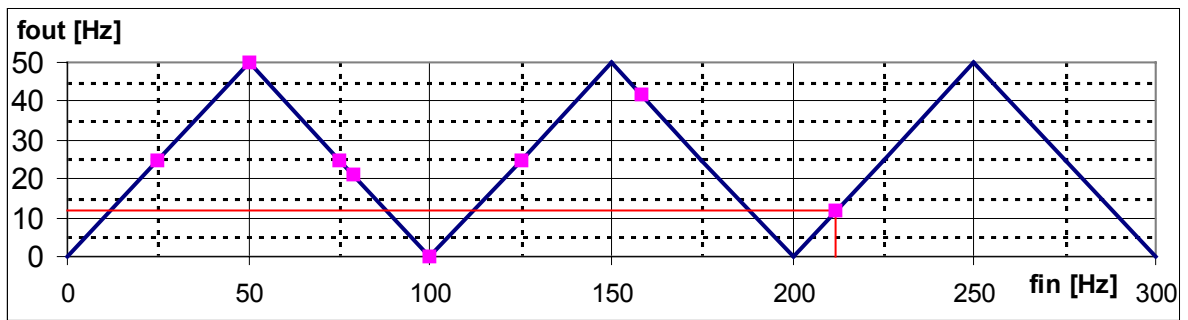
Si osserva che campionando a frequenze inferiori al doppio della frequenza del segnale si manifesta il fenomeno dell'aliasing.

Determinazione delle frequenze di aliasing

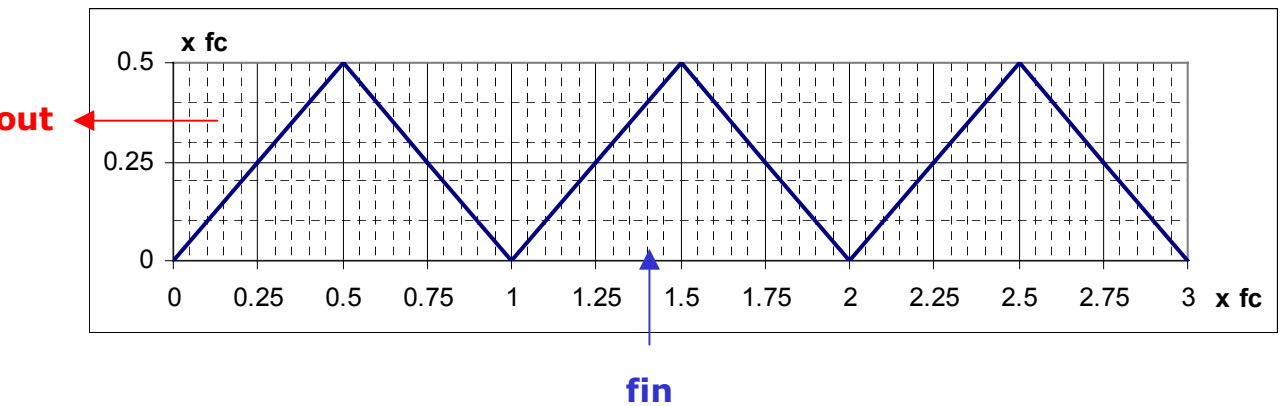
Prendendo in considerazione un campionamento a 100 Hz si può osservare, in corrispondenza di semplici segnali sinusoidali a varie frequenze, quali sono le frequenze che si ottengono nei relativi spettri, ricavati applicando la FFT ai segnali stessi campionati. Viene indicata con f_{in} la frequenza originaria del segnale analogico considerato e con f_{out} la frequenza che si ottiene dallo spettro del segnale campionato.



fin	fout
25	25
50	50
75	25
79	21
100	0
125	25
158	42
212	12



Il diagramma tracciato in blu consente, nota la frequenza del segnale in ingresso di conoscere la frequenza che si otterrà dallo spettro calcolato sul segnale campionato a 100Hz. Adimensionalizzando si ricava il seguente diagramma.



Il diagramma offre la possibilità di trovare un metodo per calcolare la frequenza che si otterrà dallo spettro del segnale campionato, una volta nota la frequenza del segnale di partenza. Si distinguono diversi casi.

$0 \leq f_{in} < \frac{f_s}{2}$	La frequenza in uscita è quella corretta: non c'è aliasing.
$\frac{f_s}{2} \leq f_{in} < f_s$	Si verifica aliasing: la frequenza in uscita è la simmetrica di quella in ingresso rispetto a $(f_s/2)$. Risulta dunque: $f_{out} = \frac{f_s}{2} - \left(f_{in} - \frac{f_s}{2} \right) = f_s - f_{in}$
$f_{in} \geq f_s$	Si verifica aliasing. La frequenza di uscita si ricava sottraendo alla frequenza di ingresso la massima frequenza multipla intera di quella di campionamento contenuta nella frequenza di ingresso stessa e procedendo con la frequenza ricavata secondo le due regole sopra riportate.

Es. $f_s=100\text{Hz}$

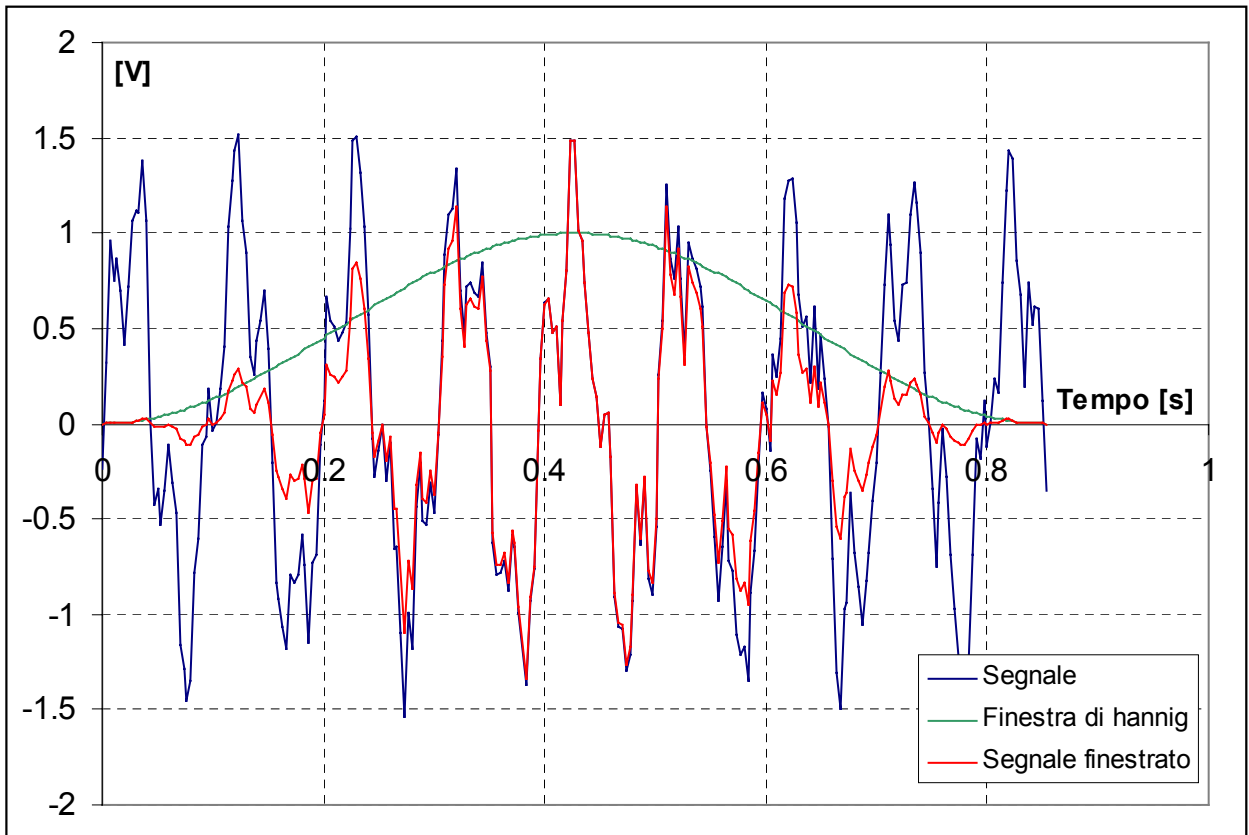
1) se $f_{in}=80\text{Hz}$ allora si tratta del secondo caso in quanto $80 > 100/2=50$; quindi la frequenza di uscita è $100-80=20\text{ Hz}$.

2) se $f_{in}=212\text{Hz}$ allora: il massimo multiplo intero della frequenza di campionamento contenuto nella frequenza del segnale è $200=2*100$; dunque eseguendo la sottrazione si ricava $212-200=12$. Si deve quindi valutare un segnale a 12Hz . $12 < 50$, dunque considerando il primo caso riportato in tabella si ha che la frequenza in uscita è proprio 12Hz .

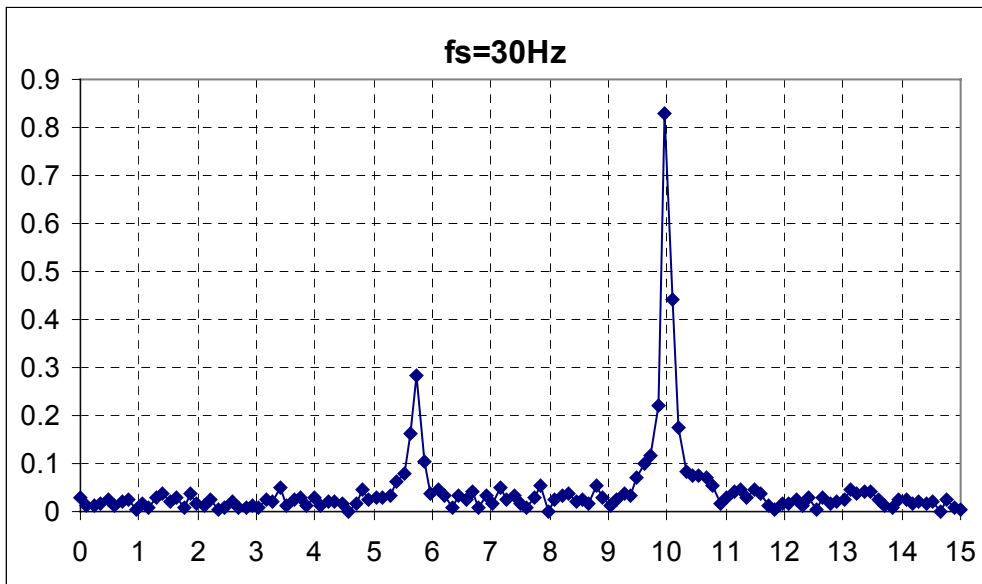
3) se $f_{in}=158\text{Hz}$ allora: il massimo multiplo intero della frequenza di campionamento contenuto nella frequenza del segnale è $100=1*100$; dunque eseguendo la sottrazione si ricava $158-100=58$. Si deve quindi valutare un segnale a 58Hz . $58 > 50$, dunque considerando il secondo caso riportato in tabella si ha che la frequenza in uscita è $100-58=42$. f_{out} risulta dunque pari a 42Hz .

Analisi di un segnale incognito

Nelle normali applicazioni le caratteristiche del segnale da trattare sono incognite!!! Si consideri un segnale qualsiasi e si ipotizzi di trattarlo con la FFT per determinarne lo spettro in frequenza. (Il segnale considerato è costruito con due sinusoidi a frequenze di 10 Hz e 35.7 Hz a cui è stato sovrapposto rumore bianco). Il segnale viene trattato con finestra di Hanning.

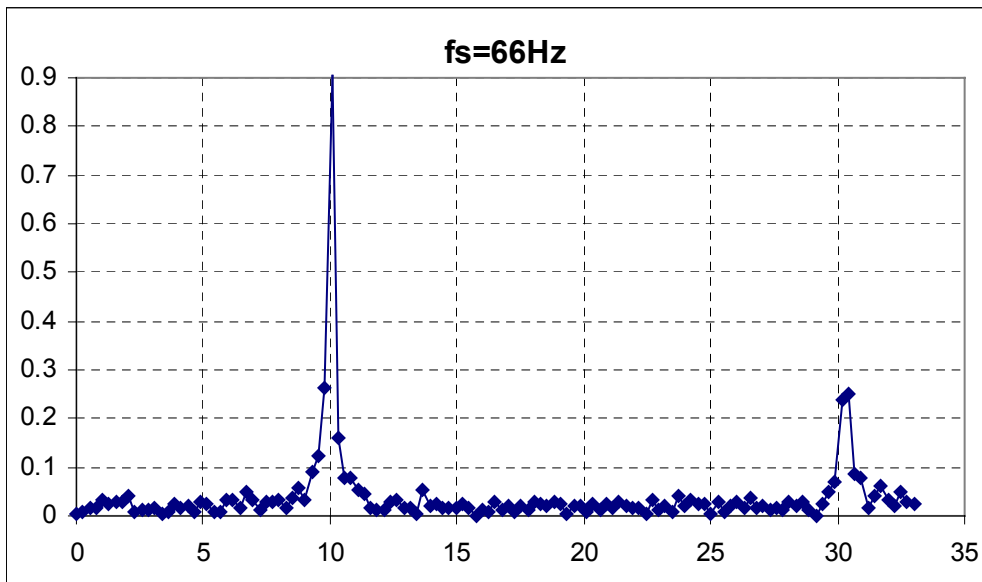


- Campionando a 30 Hz si ricava il seguente spettro.



Si ricavano due picchi a frequenze di 5.7 e 10 Hz. Entrambe potrebbero essere frequenze realmente presenti nel segnale in quanto inferiori alla metà della frequenza di campionamento. Incrementando la frequenza di campionamento si può verificare se le frequenze sono corrette.

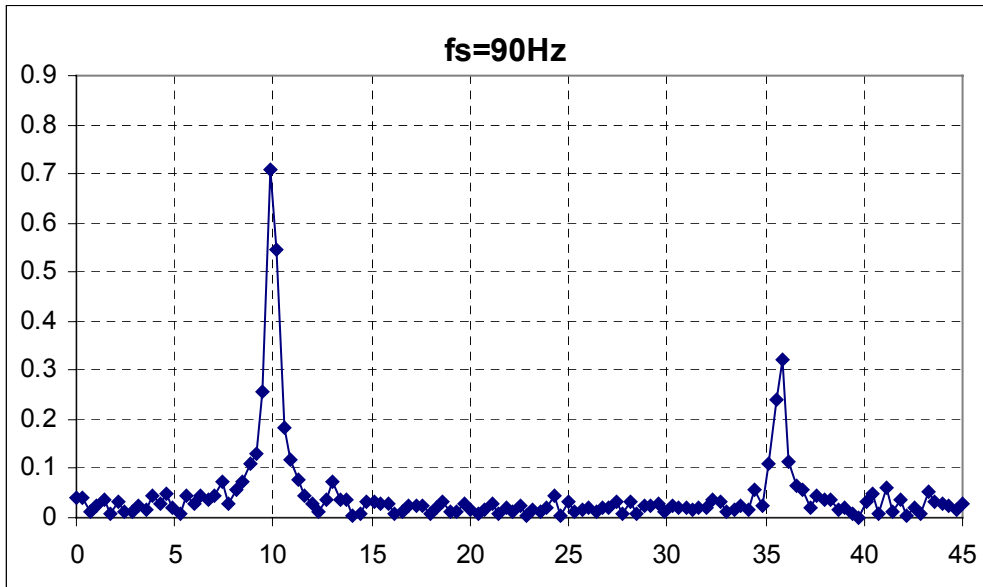
- Campionando a 66 Hz si ricava il seguente spettro.



Si ricavano due picchi a 10 e 30.4 Hz. Entrambe potrebbero essere corrette perché inferiori a $f_s/2$. Confrontando con il precedente campionamento (30Hz) si osserva che anche in quel caso si otteneva un picco a 10Hz, che quindi si può ritenere sia effettivamente presente nel segnale.

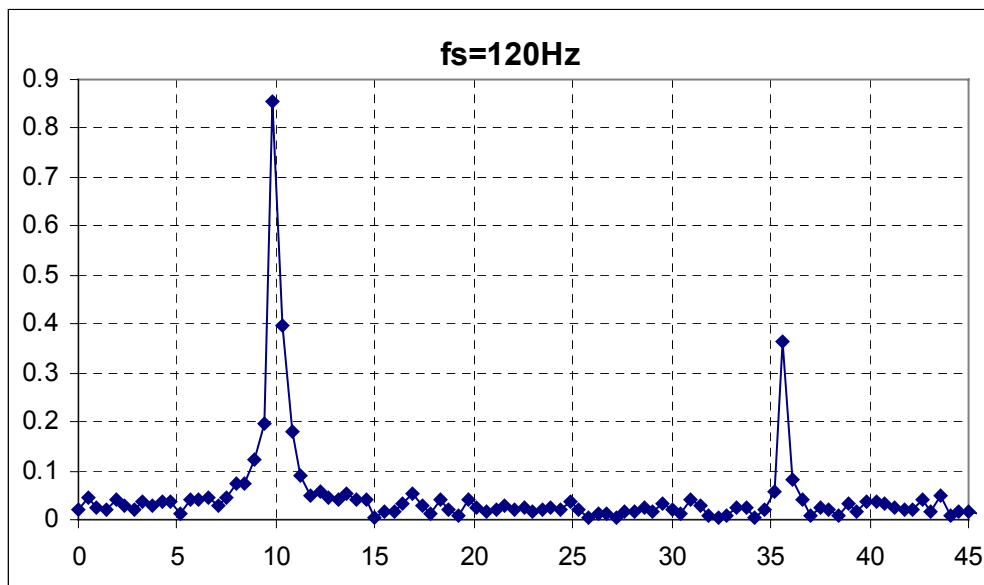
Per vedere se la frequenza di 30.4 Hz è propria del segnale di partenza si può vedere se essa ha prodotto una frequenza di aliasing a 30 Hz. Secondo quanto visto tale frequenza avrebbe dovuto essere data da $30.4 - 30 = 0.4$ Hz. A 30 Hz è stata invece trovata una frequenza a 5.7 Hz. Questo significa che la frequenza 30.4 Hz non è realmente presente nel segnale, ma è anch'essa conseguenza di aliasing (per campionamento a 66 Hz). Si deve dunque procedere a campionare a frequenze superiori.

• Campionando a 90 Hz si ricava il seguente spettro.



Si ricavano due picchi a 10 e 35.9 Hz. Se la frequenza di 35.9 Hz fosse propria del segnale essa verrebbe travisata a causa dell'aliasing sia campionando a 30 Hz sia 66 Hz, mentre potrebbe essere presente per un campionamento a 90 Hz, in quanto inferiore alla metà della frequenza di campionamento. A 30 Hz la frequenza di aliasing sarebbe $35.9 - 30 = 5.9$ (vicina a 5.7); a 66 Hz la frequenza di aliasing sarebbe $66 - (35.9 - 33) = 66 - 35.9 = 30.1$ (vicina a 30.3). I risultati ottenuti sono in accordo (a meno di differenze trascurabili) con quanto ricavato nei due casi precedenti e dunque si può affermare che 35.9 Hz è una frequenza plausibile per il segnale. Per esserne sicuri si può procedere ad un campionamento con frequenza più elevata (120 Hz).

- Campionando a 120 Hz si ricava il seguente spettro.

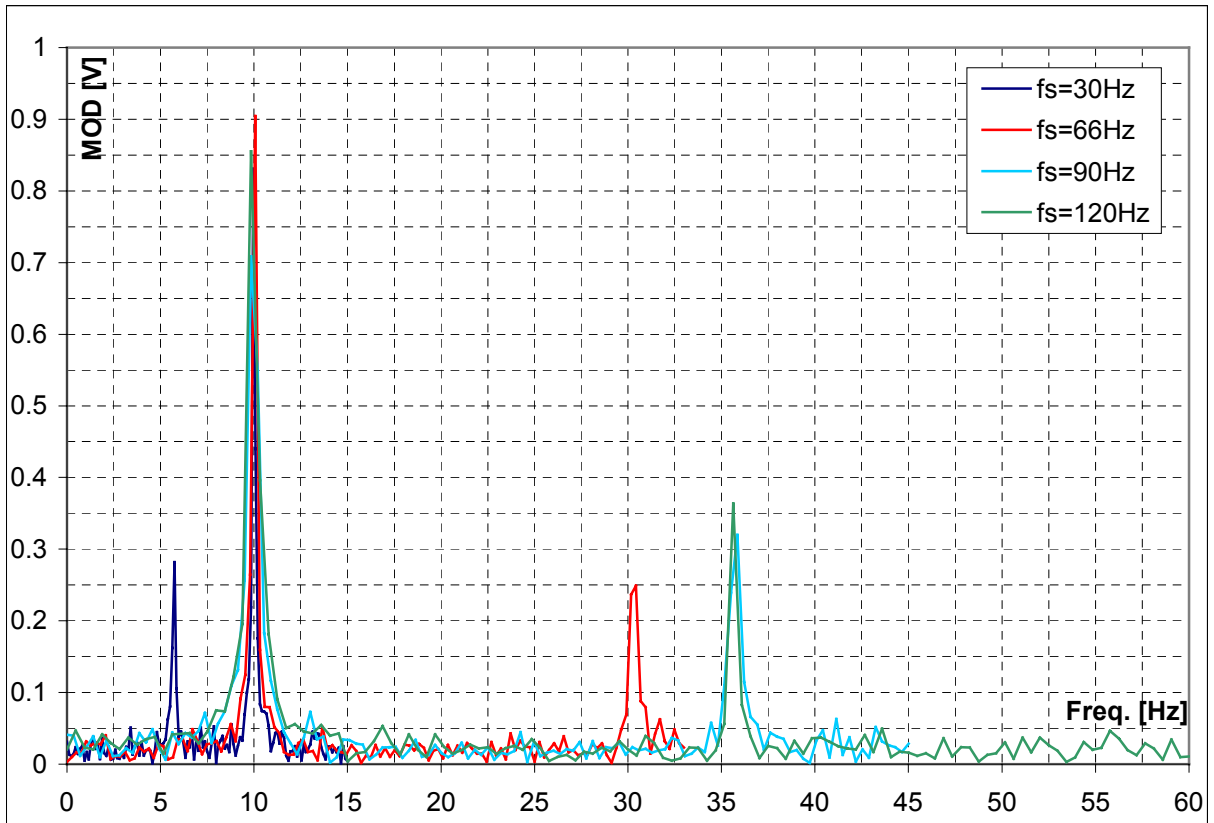


Sono confermati i risultati ricavati precedentemente.

• **Tabella riassuntiva**

fs	f1	f2				
[Hz]	[Hz]	[Hz]				
30	5.7	10		aliasing	0.4	5.9
66	30.4	10		aliasing	30.1	
90	35.9	9.8				
120	35.6	9.8				

•Grafico riassuntivo



Per evitare l'aliasing si utilizzano filtri passa-basso dedicati detti **anti-aliasing**. La frequenza di taglio deve essere inferiore a $(f_s/2)$, anche a causa della non idealità dei filtri. Possono essere inseriti anche filtri per attenuare l'effetto del **rumore**, evidente nei diagrammi relativi agli spettri ricavati.